

Практическая работа №7

Microsoft Excel. Решение уравнений

I Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Элементы теории:

Основная запись системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} .$$

Матричная формулировка имеет вид $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} .$$

Решение системы уравнений в матричной формулировке $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$,

где \mathbf{A}^{-1} — матрица, обратная к матрице \mathbf{A} .

Алгоритм решения задачи:

I нахождение обратной матрицы

1. необходимо предварительно выделить массив нужного размера (**3x3 - матрица три на три**);
2. для вычисления обратной матрицы следует воспользоваться функцией "МОБР";
3. аргументом этой функции является матрица \mathbf{A} : необходимо выделить все элементы матрицы \mathbf{A} ;
4. для запуска функции следует пользоваться только комбинацией клавиш {**Ctrl+Shift+Enter**}, но не кнопкой **OK**

II нахождение решения системы

1. необходимо предварительно выделить массив нужного размера (**3x1 - столбец из трех ячеек**);

2. для умножения матрицы A^{-1} на вектор b — следует воспользоваться функцией "МУМНОЖ";
3. аргументом этой функции является матрица **обратная матрица и вектор b**;
4. для запуска функции следует пользоваться только комбинацией клавиш {Ctrl+Shift+Enter}, но не кнопкой **ОК**.

Задание 7.1 Решить задачу

Условие: исходная система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -10 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение (рис. 7.1)

- В ячейки B1:D3 ввести матрицу A .
- В ячейки G1:G3 ввести вектор b .
- Выделить ячейки B5:D7. Для вычисления обратной матрицы A^{-1} следует воспользоваться функцией "МОБР" (рис. 4.1.56).

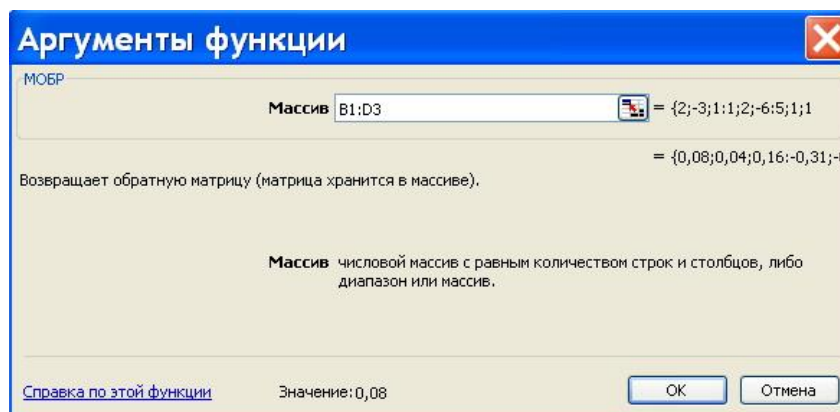


Рис. 7.1 Мастер функции "МОБР"

- Выделить ячейки G5:G7. Для вычисления $x = A^{-1}b$ следует воспользоваться функцией "МУМНОЖ" (рис. 7.2).

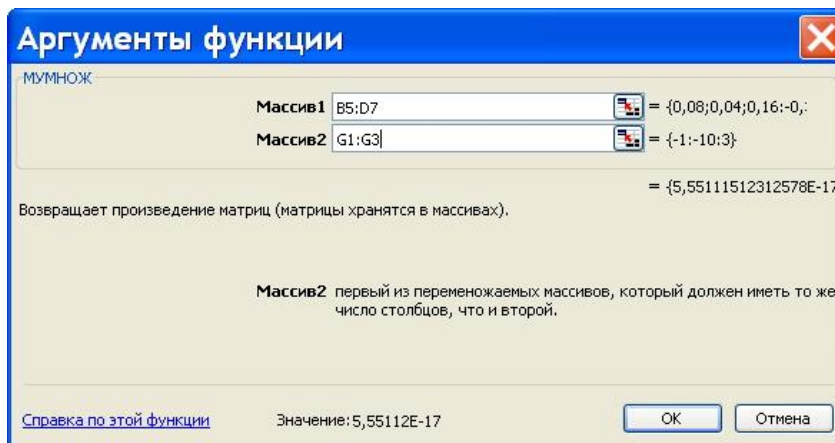


Рис. 7.2. Мастер функции "МУМНОЖ"

- Ответ: $x_1=0,00$; $x_2=1,00$; $x_3=2,00$ (рис. 7.3).

	A	B	C	D	E	F	G
1	A =	2	-3	1	b =	-1	
2		1	2	-6		-10	
3		5	1	1		3	
4							
5	A⁻¹ =	0,0800	0,0400	0,1600	x =	0,00	
6		-0,3100	-0,0300	0,1300		1,00	
7		-0,0900	-0,1700	0,0700		2,00	

Рис. 7.3. Решение системы линейных алгебраических уравнений

Задание 7.2

Задание. Решить заданную СЛАУ.

Варианты задания

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 & = S - G + K + 10 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 & = S - G + 4K - 2 \\ Sx_1 + Gx_2 + 2(S + G + K)x_3 & = 2 \cdot [(S - G) \cdot (S + G + K) + G] + K \cdot S \end{cases}$$

где K - номер факультета, G - номер группы, S - номер студента по журналу.

Институты	ИСА	ИГЭС	ИИЭСМ	ИФО	ИЭУИС	ИМОЯК	Мытищ. филиал
К	1	2	3	4	5	6	7

Выполнить проверку:

- проверить, что найденная обратная матрица, является обратной к матрице A (использовать определение обратной матрицы)
- проверить, что найденное решение обращает исходную систему в тождество.

II Решение нелинейных уравнений

Элементы теории

Пусть на участке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$ (рис. 7.4) и требуется найти корни уравнения $f(x)=0$.

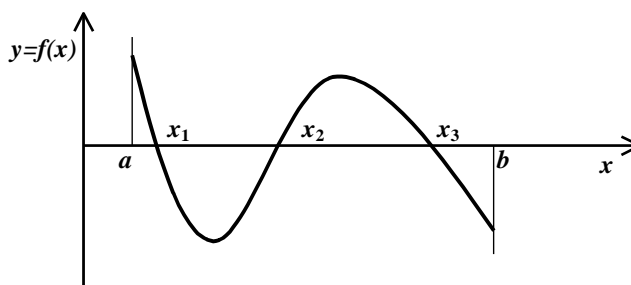


Рис. 7.4. x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $f(x)=0$

Решение такой задачи, как правило, распадается на два этапа:

- 1) определение интервалов, в которых находится только один корень (если корень существует);
- 2) вычисление этого корня с заданной точностью.

Для решения задачи на 1-ом этапе существуют различные аналитические подходы, связанные с определенными типами уравнений (многочлены, тригонометрические уравнения и т.д.). Однако наиболее эффективным численным подходом является метод перебора. Он реализуется следующим алгоритмом. Задается точность, определяемая шагом h . Затем последовательно вычисляются значения функции

$$f: f(x_0)=f(a), f(x_1)=f(a+h), f(x_2)=f(a+2h), f(x_3)=f(a+3h), \dots, f(x_i), \dots,$$

где $x_i=a+ih$.

В интервалах, на концах которых функция меняет знак:

$$f(x_i) * f(x_{i+1}) < 0,$$

находится корень уравнения.

Для решения задачи на 2-ом этапе Excel предлагает средство **Подбор параметра**, которое находится на вкладке *Данные – Анализ «что если»* реализует метод Ньютона.

Задание 7.3

Требуется найти корни полинома $P_3(x)=x^3-61x^2+740x+3513$ на отрезке $x \in [-50,0;50,0]$.

Порядок выполнения:

1. В ячейки столбца *A* вводим названия a_0, a_1, a_2 и a_3
2. В ячейки столбца *B* вводим значения a_0, a_1, a_2 и a_3
3. Присваиваем значениям столбца *B* имена.
4. В ячейки столбца *C* вводим значения $x_i \in [-50,0;50,0]$ с шагом $h=1,0$.
5. В ячейках столбца *D* вычисляем значения $f(x_i)$ (рис 7.5)

	A	B	C	D	E	F
1				Решение нелинейных уравнений		
2	Этап 1					
3			x_i	$f(x_i)$	$f(x_i) * f(x_{i+1})$	
4	a0	3513	-50,00	=a3*C4^3+a2*C4^2+a1*C4+a0		
5	a1	740	-49,00			
6	a2	-61	-48,00			
7	a3	1	-47,00			
8			-46,00			
9			-45,00			

Рис 7.5 Ввод формулы

6. В ячейках столбца *E* вычисляем значения $f(x_i) * f(x_{i+1})$.
7. Для поиска отрицательных значений $f(x_i) * f(x_{i+1}) < 0$ можно использовать команду *Найти* вкладки *Главная-Редактирование* (рис. 7.6). Так же, для поиска отрицательных значений, можно воспользоваться *Условным форматированием*.

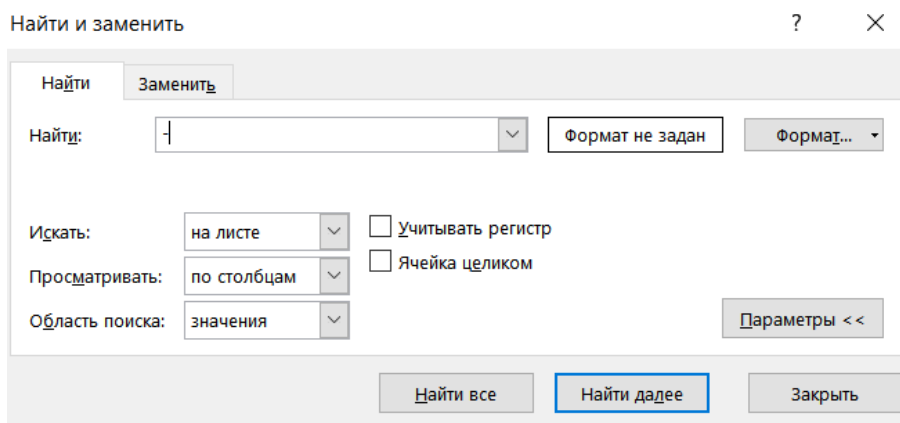


Рис. 7.6 Поиск отрицательных значений

В нашем примере отрицательные значения этого произведения располагаются в ячейках E50, E77, E94 (рис. 7.7, этап 1).

Для нахождения первого корня выделяем ячейку D50.

Выбираем команду *Подбор параметра* вкладки *Данные – Анализ «что если»*. Появится диалоговое окно *Подбор параметра* (рис. 7.7, этап 1). В поле *Установить в ячейке* уже будет находиться ссылка на выделенную ячейку D50. В поле *Значение* вводим величину, которую необходимо получить — 0. В поле *Изменяя значение ячейки* вводим ссылку на исходную ячейку — C50.

Выполнив команду *Подбор параметра*, Excel начнет итерационный процесс поиска решения. По его завершении появится диалоговое окно *Результат подбора параметра* (рис. 7.8, этап 1), а в исходной ячейке C50 будет располагаться искомое значение корня (рис. 7.9, этап 2).

Аналогичным образом находятся остальные корни уравнения (рис. 7.9, этап 2).

При выполнении работы следует предьявить только этап 2.

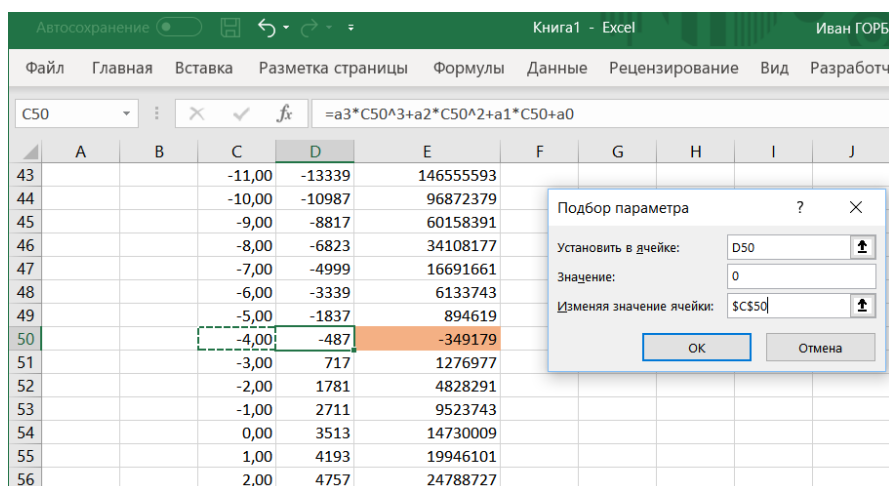


Рис. 7.7 (этап 1)

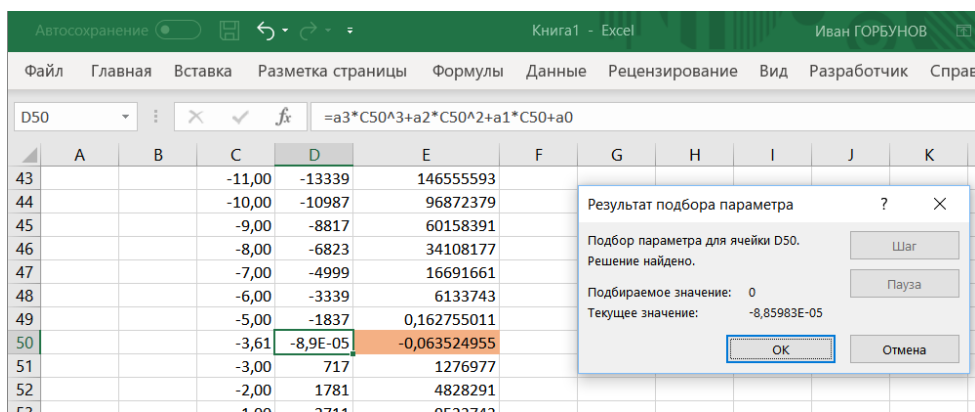


Рис. 7.8 (этап 1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Решение нелинейных уравнений								
2	Этап 2								
3		x_i	$f(x_i)$	$f(x_i) * f(x_{i+1})$		x_1	x_2	x_3	
4	a0	3513	-50,00	-310987	92318667859		-3,61	23,92	40,00
5	a1	740	-49,00	-296857	84052981551				
6	a2	-61	-48,00	-283143	76403023977				
7	a3	1	-47,00	-269839	69332162821				
8			-46,00	-256939	62805398343				
9			-45,00	-244437	56789314899				
46			-8,00	-6823	34108177				
47			-7,00	-4999	16691661				
48			-6,00	-3339	6133743				
49			-5,00	-1837	0,162755011				
50			-3,61	-9E-05	-0,063524955				
51			-3,00	717	1276977				
74			20,00	1913	2703069				
75			21,00	1413	1295721				
76			22,00	917	0,020905888				
77			23,92	2,3E-05	-0,000889127				
78			24,00	-39	18993				
79			25,00	-487	441709				
91			37,00	-1963	3099577				
92			38,00	-1579	1719531				
93			39,00	-1089	530343				
94			40,00	-487	-113471				
95			41,00	233	250941				
102			48,00	9081	99536841				
103			49,00	10961	142635493				
104			50,00	13013					
105									

Рис. 7.9 (этап 2)

Задание 7.4

1. Вычислить все корни полинома $P_3(x)$ на отрезке $x \in [-50; 50]$.

Относительную погрешность принять $\varepsilon = 0,001$.

Варианты задания

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,$$

где

$$a_0 = -\tilde{S}(\tilde{G}^2 + \tilde{S}^2), \quad a_1 = (\tilde{G} + \tilde{S})^2, \quad a_2 = -(2\tilde{G} + \tilde{S}), \quad a_3 = 1,$$

$$\tilde{G} = \frac{G}{10}, \quad \tilde{S} = \frac{S}{10},$$

S - номер студента по журналу, G - номер группы.

2. Построить график функции.

Задание 7.5 Написать отчет:

- 1) Что такое СЛАУ
- 2) Алгоритм решения СЛАУ.
- 3) Получение обратной матрицы.
- 4) Выполнение проверки для найденного решения СЛАУ
- 5) Алгоритм решения нелинейного уравнения.
- 6) Как можно найти определенные данные в Excel.
- 7) Для чего нужна функция Подбор параметра и как ее использовать.
- 8) Метод Ньютона